

Étude d'une fonction

Tout le cours remis au clair, **étape par étape**, avec des dessins et un exemple à chaque idée. À lire dans l'ordre : chaque notion prépare la suivante. Le but n'est pas de retenir un résultat, mais de comprendre **pourquoi** et de savoir **refaire**.

À QUOI SERT TOUT ÇA ?

« Étudier une fonction », c'est **comprendre l'allure de sa courbe sans avoir à la dessiner point par point**. On répond, dans l'ordre, à : où la fonction existe-t-elle ? où coupe-t-elle les axes ? de quelles droites se rapproche-t-elle (asymptotes) ? où monte-t-elle / descend-elle (grâce à f') ? est-elle creuse ou bombée (grâce à f'') ? Avec ces réponses, on peut tracer la courbe.

1. **Les limites** — vers quelle valeur va $f(x)$?
2. Limites à gauche / à droite
3. Limites infinies
4. Calculer une limite (la méthode)
5. Formes indéterminées
6. Limites quand $x \rightarrow \pm\infty$
7. **Les asymptotes** (verticale, horizontale, oblique)
8. **Les dérivées** — l'idée & le formulaire
9. La tangente
10. f' : croissance & extrema
11. f'' : concavité & inflexion
12. **L'étude complète** + exemple résolu

I · Les limites

Une limite répond toujours à la même question : « **vers quelle valeur se dirige $f(x)$ quand x s'approche d'un point ?** » On ne demande pas combien vaut f au point (parfois la fonction n'y est même pas définie) : on demande vers quoi elle **tend** en s'en approchant.

1 L'idée : s'approcher sans forcément toucher

Si, en prenant des x de plus en plus proches de a , les valeurs $f(x)$ se rapprochent autant qu'on veut d'un nombre L , on dit que la limite de f en a vaut L , et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

L'IDÉE EN UNE IMAGE

Plus x se rapproche de a , plus $f(x)$ se « colle » à une hauteur L . Peu importe ce qui se passe exactement **en a** : on regarde le voyage, pas l'arrivée. (On ne peut chercher une limite en a que si a est « collé » au domaine : soit a y est, soit c'en est un bord. Ex. : pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on peut parler de la limite en 0 même si $f(0)$ n'existe pas.)

2 À gauche, à droite... et seulement alors

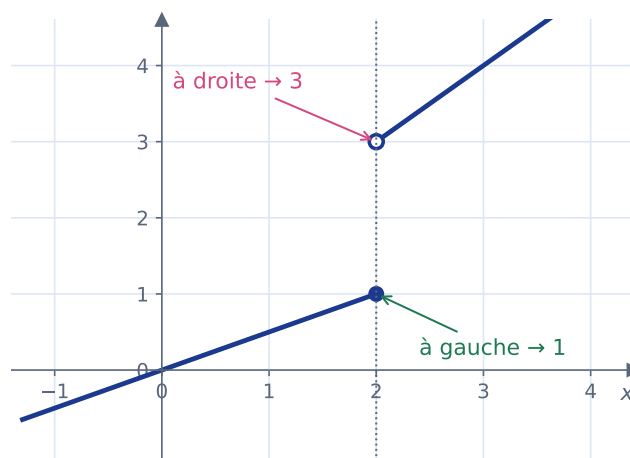
On peut s'approcher d'un point de **deux côtés** : par la gauche (des x plus petits, noté $x \rightarrow a^-$) ou par la droite (des x plus grands, $x \rightarrow a^+$).

LA RÈGLE D'OR

La limite en a existe **seulement si les deux côtés donnent la même valeur**. Si $\lim_{x \rightarrow a^-} = \lim_{x \rightarrow a^+}$, la limite existe (c'est cette valeur). Si les deux côtés diffèrent, **la limite n'existe pas**.

EXEMPLE

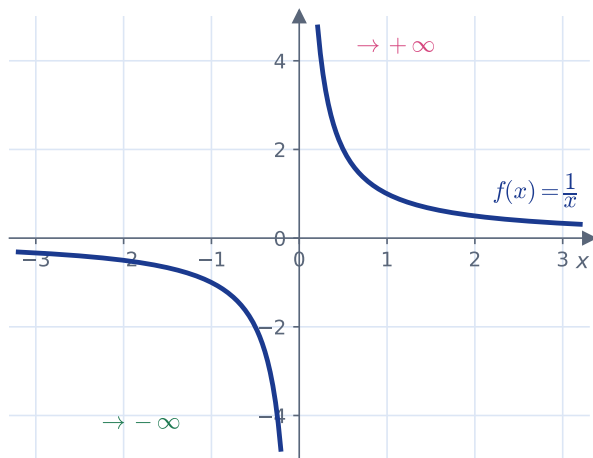
Fonction en deux morceaux : $f(x) = \frac{x}{2}$ si $x \leq 2$, et $f(x) = x + 1$ si $x > 2$. En 2, la gauche tend vers 1, la droite vers 3 : deux valeurs différentes, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ **n'existe pas**.



À gauche on arrive à 1, à droite à 3 : pas de limite en 2.

3 Quand $f(x)$ explose : les limites infinies

Parfois $f(x)$ ne s'approche d'aucun nombre : elle grimpe vers $+\infty$ ou plonge vers $-\infty$. L'exemple type est $f(x) = \frac{1}{x}$ près de 0.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

NE PAS CONFONDRE

Limite infinie : $f(x)$ file vers $\pm\infty$ alors que x tend vers un nombre fini (section 3).

Limite « en l'infini » : c'est x qui part vers $\pm\infty$ (section 6). Deux situations bien distinctes !

4 Calculer une limite en un point : la méthode

Bonne nouvelle : pas besoin de tableaux de valeurs. On suit cet **arbre de décision**.

On cherche $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

① a est-il dans le domaine (ou une borne du domaine) ?

non → la limite n'existe pas.

② **oui** : est-ce une fonction « usuelle » (somme, produit, composée), définie en a ?

oui → on remplace : réponse = $f(a)$.

③ Si c'est un quotient $\frac{n(x)}{d(x)}$, on regarde le dénominateur $d(a)$:

$d(a) \neq 0 \rightarrow$ réponse = $\frac{n(a)}{d(a)}$.

$d(a) = 0$ et $n(a) \neq 0 \rightarrow$ forme « $k/0$ » → $\pm\infty$ (le **signe** se lit dans un petit tableau de signes du dénominateur).

$d(a) = 0$ et $n(a) = 0 \rightarrow$ forme « $0/0$ » → on **factorise** par $(x - a)$, on simplifie, puis on remplace.

CAS USUEL

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 5 = 8. \text{ On remplace } x \text{ par } 3.$$

CAS « $K/0$ »

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{x-1}$: à gauche $\frac{-3}{0^-} = +\infty$, à droite $\frac{-3}{0^+} = -\infty$. Côtés différents → pas de limite.

CAS « $0/0$ »

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ donne « $0/0$ ». On factorise : $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, donc $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1$, et on remplace : $-1 - 1 = -2$. Le facteur gênant a disparu (il reste juste un « trou » en $(-1, -2)$).

5 Les formes indéterminées

Dès qu'apparaissent des $\pm\infty$, certaines opérations sont évidentes ($(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $\frac{x}{x} = 0\dots$), mais **quatre situations ne donnent aucune réponse directe** : il faut **transformer** l'expression d'abord.

LES 4 FORMES À REPÉRER

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty$$

LES 2 OUTILS

Factoriser (pour « $0/0$ » avec des polynômes). **Multiplier par le conjugué** quand une racine carrée crée un « $0/0$ » ou un « $\infty - \infty$ ».

Deux limites trigonométriques à connaître par cœur : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

6 Quand x part à l'infini

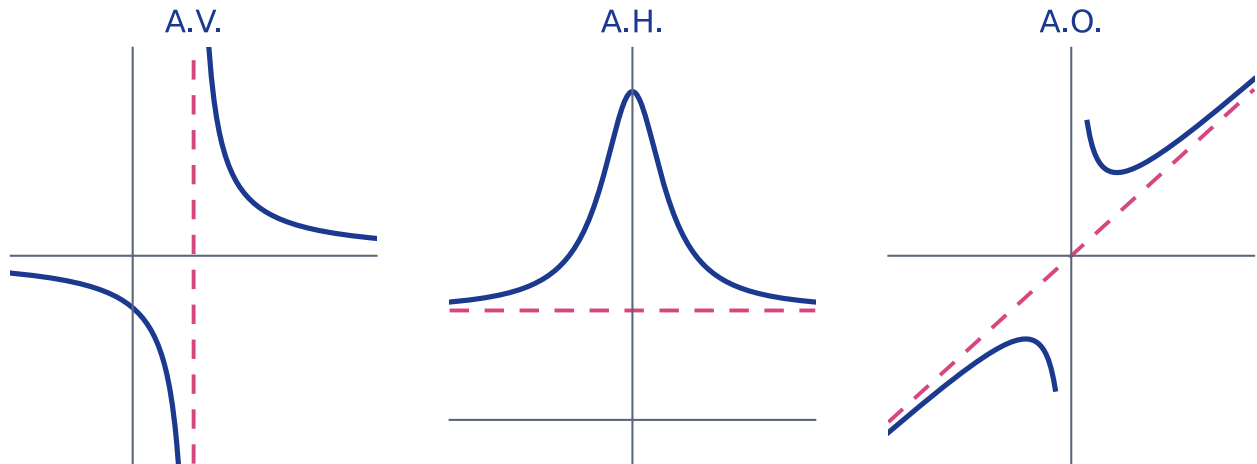
Ici x devient immense ($+\infty$) ou très négatif ($-\infty$). Outil de base : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ (diviser par un nombre géant $\Rightarrow$ résultat minuscule).

- **Un polynôme** se comporte comme son **terme de plus haut degré** : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$.
- **Un quotient de polynômes** : on garde les termes de plus haut degré (haut de degré n , bas de degré m) :
 - $n = m \rightarrow$ rapport des coefficients : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2}$.
 - $n < m \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{x^2 - 4x + 3} = 0$.
 - $n > m \rightarrow \pm\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 - 3x + 1}{x - 3} = -\infty$.

Les fonctions périodiques ($\sin x$, $\cos x$) n'ont **jamais** de limite en $\pm\infty$: elles oscillent sans se stabiliser.

II · Les asymptotes

Une **asymptote** est une droite dont la courbe se rapproche de plus en plus (souvent sans jamais la toucher). C'est l'application directe des limites : chaque type d'asymptote correspond à une limite particulière.



Les trois types (asymptote en pointillés roses) : verticale $x = a$, horizontale $y = b$, oblique $y = mx + p$.

7 Asymptote verticale (A.V.)

Définition. La droite $x = a$ est asymptote verticale si f a une limite infinie en a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. **En pratique** : on cherche les a qui annulent le dénominateur (donc hors du domaine) et on vérifie que la limite y est infinie — c'est exactement le cas « $k/0$ ».

EXEMPLE

Pour $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$, le dénominateur s'annule en $x = 2$ et la limite y est infinie $\rightarrow$ **A.V.** $\equiv x = 2$.

8 Asymptote horizontale (A.H.)

Définition. La droite $y = b$ est asymptote horizontale si la limite en l'infini est un **nombre fini** : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$. C'est le cas « degrés égaux » des quotients à l'infini.

EXEMPLE

Pour $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$, à l'infini elle se comporte comme $\frac{x}{-x} = -1 \rightarrow$ **A.H.** $\equiv y = -1$.

9 Asymptote oblique (A.O.)

Définition. Quand f file vers l'infini mais en **longeant une droite penchée** $y = mx + p$ (avec $m \neq 0$). Cela arrive pour un quotient où le haut a un **degré de plus** que le bas.

COMMENT LA TROUVER

$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (un réel non nul), puis $p = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$. L'asymptote est $y = mx + p$. (Autre méthode : poser la division du haut par le bas ; le quotient donne la droite, le reste tend vers 0.)

EXEMPLE

Pour $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$: $m = \lim \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $p = \lim \frac{1}{x} = 0 \rightarrow$ **A.O.** $\equiv y = x$.

BON RÉFLEXE

Du même côté, une courbe ne peut pas avoir **à la fois** une A.H. et une A.O. On regarde le degré du haut par rapport au bas : même degré $\rightarrow$ horizontale · un degré de plus $\rightarrow$ oblique · plus petit $\rightarrow$ l'axe $y = 0$.

III • Les dérivées

10 L'idée d'une dérivée : la pente

La dérivée mesure **à quelle vitesse f monte ou descend** en un point. Plus précisément : le nombre $f'(a)$, appelé **nombre dérivé**, est la **pente de la tangente** à la courbe au point $(a, f(a))$ — la droite qui « épouse » la courbe à cet endroit.

L'IDÉE

Si on zoome très fort sur la courbe autour d'un point, elle ressemble à une droite : c'est la tangente. Sa pente, c'est $f'(a)$. Pente positive $\Rightarrow$ ça monte ; pente négative $\Rightarrow$ ça descend ; pente nulle $\Rightarrow$ c'est plat (souvent un sommet ou un creux).

11 Le formulaire des dérivées

On ne recalcule jamais une dérivée « à la main » : on applique ces formules (elles sont fournies à l'examen, mais il faut savoir **s'en servir**).

Fonctions de base		Avec une fonction « intérieure » f	
$(k)' = 0$	$(x)' = 1$	$(f^n)' = n f^{n-1} \cdot f'$	$(\sqrt[n]{f})' = \frac{f'}{2\sqrt[n]{f}}$
$(x^n)' = n x^{n-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Composée : $(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	
$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	$(\sin f)' = f' \cos f$	$(\cos f)' = -f' \sin f$
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	

S'EN SERVIR

$f(x) = x^3 - 2x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2$.
 $f(x) = (x-1)^3 \rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2$ (formule $(f^n)'$, avec $f' = 1$).

QUOTIENT

$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \rightarrow$ on applique $\left(\frac{f}{g}\right)'$: « haut·bas - haut·bas' », sur bas² ». On obtient $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

La **dérivée seconde** f'' est simplement la dérivée de f' : on dérive deux fois de suite.

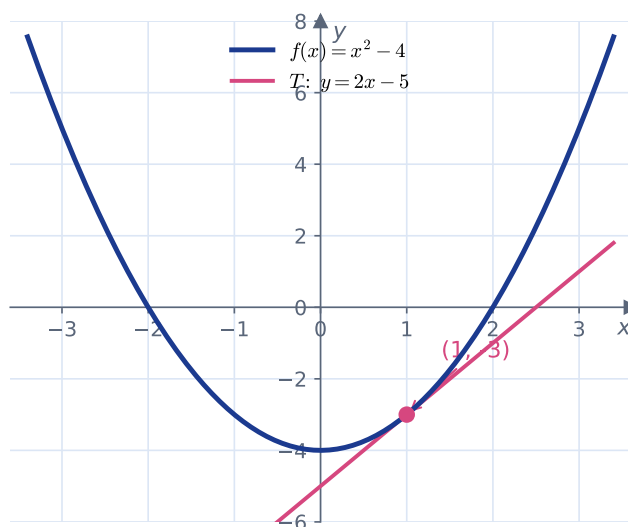
12 La tangente

Connaissant $f(a)$ et la pente $f'(a)$, l'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$T \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EXEMPLE

$f(x) = x^2 - 4$, au point $a = 1$. On a $f(1) = -3$ et $f'(x) = 2x$ donc $f'(1) = 2$. La tangente : $y - (-3) = 2(x - 1)$, soit $y = 2x - 5$.



La tangente touche la courbe en $(1, -3)$; sa pente vaut $f'(1) = 2$.

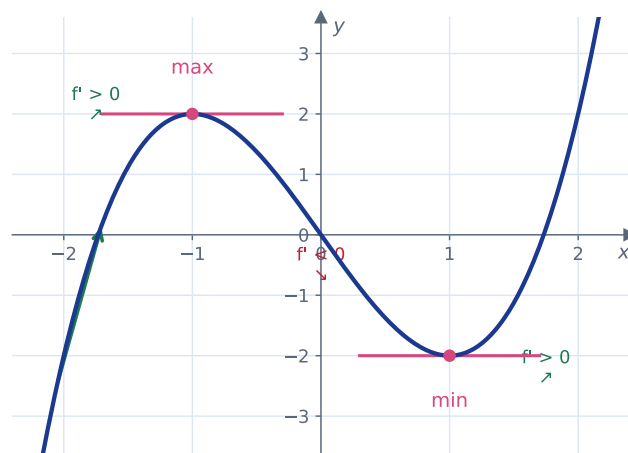
13 $f' \rightarrow$ croissance & extrema

Le **signe** de f' raconte l'allure de f . On calcule f' , on cherche où elle s'annule, et on fait son **tableau de signes**.

- $f' > 0$ sur un intervalle $\rightarrow f$ **croissante** ($\nearrow$)
- $f' < 0 \rightarrow f$ **décroissante** ($\searrow$)
- f' s'annule en a **en changeant de signe** $\rightarrow$ un **extremum** :
 $+$ puis $- \rightarrow$ **maximum** $\cdot$ $-$ puis $+$ $\rightarrow$ **minimum**

POURQUOI

Si la pente passe de positive à négative, la courbe arrête de monter pour redescendre : c'est un sommet. À l'inverse, un creux.



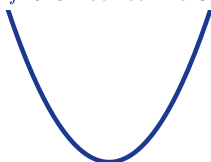
$f' > 0$ là où ça monte, $f' < 0$ là où ça descend, $f' = 0$ (tangente plate) aux extrema.

14 $f'' \rightarrow$ concavité & inflexion

Le signe de f'' dit si la courbe est **creuse ou bombée**.

$f'' > 0$: concavité $\cup$

$f'' < 0$: concavité $\cap$



$\cup$ « sourire » : $f'' > 0$ $\cdot$ $\cap$ « moue » : $f'' < 0$.

- $f'' > 0 \rightarrow$ concavité vers le **haut** ($\cup$)
- $f'' < 0 \rightarrow$ concavité vers le **bas** ($\cap$)
- f'' **change de signe** en $c \rightarrow$ **point d'inflexion** en $(c, f(c))$: la courbe change de forme, et la tangente y traverse la courbe.

IV · L'étude complète d'une fonction

15 La méthode en 5 étapes

1. **Étude de f** : domaine · $G_f \cap OX$ (résoudre $f(x) = 0$) · $G_f \cap OY$ (calculer $f(0)$) · parité · asymptotes A.V./A.H./A.O.
2. **Étude de f'** : calcul, racines, tableau de signes $\Rightarrow$ croissance & extrema.
3. **Étude de f''** : calcul, racines, tableau de signes $\Rightarrow$ concavité & inflexions.
4. **Tableau récapitulatif** : on rassemble les conclusions de f' et f'' .
5. **Graph** : tracer les asymptotes, placer intersections, min/max et inflexions, puis la courbe.

16 Exemple complet résolu : $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

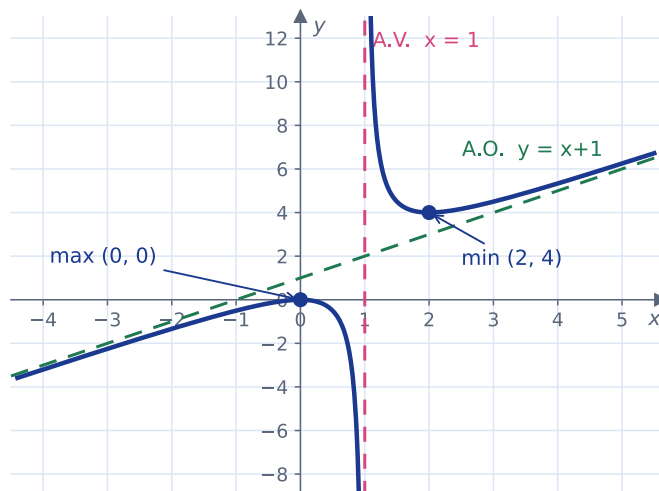
① Étude de f

- **Domaine** : $x - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- $G_f \cap OX$: $f(x) = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0 \rightarrow \{(0, 0)\}$.
- $G_f \cap OY$: $f(0) = \frac{0}{-1} = 0 \rightarrow \{(0, 0)\}$.
- **Parité** : $f(-x) = \frac{x^2}{-x-1} \neq f(x)$ et $\neq -f(x) \rightarrow$ ni paire ni impaire.
- **A.V.** : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$ (forme « $\frac{1}{0}$ ») $\rightarrow x = 1$.
- **A.H.** : $\lim_{\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty \rightarrow$ pas d'A.H.
- **A.O.** : $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2-x} = 1, p = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = 1 \rightarrow y = x + 1$.

② f' et ③ f''

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} : \text{s'annule en 0 et 2} \rightarrow \text{max (0, 0), min (2, 4)}.$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} : \text{ne change de signe qu'en } x = 1 \text{ (hors domaine)} \rightarrow \text{pas d'inflexion}.$$



La courbe avec ses deux asymptotes, le max (0, 0) et le min (2, 4).

④ Tableau récapitulatif

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+
f''	-	-	-		+	+	+
f	$\nearrow \cap$	M 0	$\searrow \cap$		$\searrow \cup$	m 4	$\nearrow \cup$

⑤ **Lecture** : à gauche de $x = 1$, la courbe longe l'A.O., monte jusqu'au max (0, 0), puis plonge vers $-\infty$ (concavité $\cap$). À droite, elle descend de $+\infty$ jusqu'au min (2, 4), puis remonte le long de l'A.O. (concavité $\cup$).

Le récapitulatif à relire avant l'examen

Limites en un point

Situation	Ce qu'on fait
Fonction usuelle, a dans le domaine	On remplace : la limite vaut $f(a)$.
Quotient, dénominateur $\neq 0$	On remplace : $\frac{n(a)}{d(a)}$.
Forme « $k/0$ » (haut non nul)	$\pm\infty$; tableau de signes pour le signe de chaque côté.
Forme « $0/0$ »	On factorise par $(x - a)$, on simplifie, on remplace.
Limite gauche $\neq$ limite droite	La limite n'existe pas.

Limites en $\pm\infty$ & asymptotes

Situation	Ce qu'on fait
Polynôme	Limite de son terme de plus haut degré.
Quotient : degrés égaux / haut plus petit / haut plus grand	Rapport des coefficients / $0 / \pm\infty$.
A.V. $x = a$	Valeur qui annule le dénominateur + limite infinie en a .
A.H. $y = b$	$\lim_{\pm\infty} f(x) = b$ (fini).
A.O. $y = mx + p$	$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis $p = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$.

Dérivées

Outil	Ce qu'il donne
$f'(a)$ (nombre dérivé)	La pente de la tangente en $(a, f(a))$. Tangente : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
Signe de f'	> 0 : ↗ < 0 : ↘ · s'annule en changeant de signe : extremum.
Signe de f''	> 0 : ∪ < 0 : ∩ · change de signe : point d'inflexion.

« Une limite ne dit pas où l'on est, mais vers où l'on va. »

Bon courage : relis chaque exemple en cachant la réponse, puis refais-le sur ta feuille. C'est comme ça qu'on l'ancre.